אלגברה ליניארית ב' להנדסה ומדעים תשפ"ד 2023-2024 - תרגול 7

הגדרה (מההרצאה): יהיו $\vec{u} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \vec{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ אז המכפלה הסקלרית של $\vec{u}, \vec{v}$ מוגדרת ע"י:

$$(\vec{v}, \vec{u}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \vec{v}^t \vec{u}$$

ראיתם בהרצאה שמכפלה סקלרית מקיימת את התכונות הבאות:

- לינאריות בכל רכיב (בילינאריות): לכל $\vec{v}, \vec{u}, \vec{x} \in \mathbb{R}^n$ ו-$\lambda \in \mathbb{R}$ מתקיים :

$$(\vec{u} + \lambda\vec{x}, \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \lambda(\vec{x}, \vec{v})$$

ו-

$$(\vec{u}, \vec{v} + \lambda\vec{x}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \lambda(\vec{u}, \vec{x})$$

- חיובית: לכל $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ מתקיים ש:

$$(\vec{v}, \vec{v}) \geq 0, \ and \ (\vec{v}, \vec{v}) = 0 \Longleftrightarrow \vec{v} = 0$$

- סימטריה: לכל $\vec{v}, \vec{u} \in \mathbb{R}^n$ מתקיים:

$$(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{v}, \vec{u})$$

הגדרה (מההרצאה): יהיו $\vec{u} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \vec{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$, נאמר ש $\vec{v}, \vec{u}$ מאונכים או אורתוגונליים, ונסמן $\vec{v} \perp \vec{u}$ אם $(\vec{v}, \vec{u}) = 0$.

הגדרה(מההרצאה): יהי $\vec{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$. נגדיר את האורך של $\vec{v}$להיות:

$$\| \vec{v} \| = \sqrt{(\vec{v}, \vec{v})} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

שאלה 1 (אלכסוני מעוין מאונכים זה לזה): נתונים וקטורים $\vec{v}, \vec{u} \in \mathbb{R}^n$ כך ש- $\| \vec{v} \| = \| \vec{u} \|$. הוכיחו ש $\vec{v} - \vec{u}, \vec{v} + \vec{u}$ מאונכים זה לזה.

פתרון: נשתמש בבילינאריות המכפלה הסקלרית ונקבל:

$$(\vec{v} - \vec{u}, \vec{v} + \vec{u}) = (\vec{v}, \vec{v} + \vec{u}) - (\vec{u}, \vec{v} + \vec{u}) = (\vec{v}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{u}) - (\vec{u}, \vec{v}) - (\vec{u}, \vec{u}) =$$

כעת נשתמש בהגדרת האורך ובסימטריה על המכפלה הסקלרית ונקבל:

$$\| \vec{v} \|^2 + (\vec{v}, \vec{u}) - (\vec{v}, \vec{u}) - \| \vec{u} \|^2 = 0$$

כנדרש.

טענה(מההרצאה): יהיו $\vec{x}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ כאשר $\vec{v} \neq 0$. אז קיימת הצגה יחידה $\vec{x} = \vec{x}_{\parallel} + \vec{x}_{\perp}$ כאשר:

- $\vec{x}_{\parallel} = c\vec{v}$ עבור $c \in \mathbb{R}$ כלשהו
- $\vec{x}_{\perp} \perp \vec{v}$

נקרא ל -$\vec{x}_{\parallel}$ וקטור **ההיטלה האורתוגונלי של** $\vec{x}$ **על** $\vec{v}$.

טענה(מההרצאה):

- $\vec{x}_{\parallel} = \frac{(\vec{x},\vec{v})}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v}$
- $\vec{x}_{\perp} = \vec{x} - \vec{x}_{\parallel}$

שאלה 2: חשבו את ההיטל האורתוגונלי של הוקטור $\begin{bmatrix}2\\9\end{bmatrix}$ על הוקטור $\begin{bmatrix}1\\-4\end{bmatrix}$.

פתרון: נשתמש בנוסחה מהטענה הקודמת, ונקבל:

$$\begin{bmatrix}2\\9\end{bmatrix}_{\parallel} = \frac{\left(\begin{bmatrix}2\\9\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\-4\end{bmatrix}\right)}{\| \begin{bmatrix}1\\-4\end{bmatrix} \|^2}\begin{bmatrix}1\\-4\end{bmatrix} = \frac{2-36}{1+16}\begin{bmatrix}1\\-4\end{bmatrix} = -2\begin{bmatrix}1\\-4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2\\8\end{bmatrix}$$

שאלה 3: נתונים וקטורים $\vec{v},\vec{u}$ כך ש- $\| \vec{v} \| = 1$. הוכיחו כי ההיטל של וקטור $\vec{u}$ על וקטור $\vec{v}$ שווה ל- $(\vec{u},\vec{v})\vec{v}$.

פתרון: שוב נשתמש בנוסחא ונקבל:

$$\vec{u}_{\parallel} = \frac{(\vec{u},\vec{v})}{\| \vec{v} \|^2}\vec{v} = (\vec{u},\vec{v})\vec{v}$$

שאלה 4: יהיו $\vec{v_1},\dots\vec{v_n}$ המאונכים לוקטור $\vec{u}$. הראו כי כל צירוף לינארי של $\vec{v_1},\dots\vec{v_n}$ מאונך ל$-\vec{u}$.

פתרון: יהי $\vec{v} = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\vec{v_i}$ צ"ל כלשהו של $\vec{v_1},\dots\vec{v_n}$. נראה כי $\vec{v} \perp \vec{u}$. ואכן, מבילינאריות המכפלה הסקלרית נקבל:

$$(\vec{v},\vec{u}) = (\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\vec{v_i},\vec{u}) = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i(v_i,u) = 0$$

כנדרש. **משפט פיתגורס(מההרצאה):** יהיו $\vec{x},\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ כך ש $\vec{x} \perp \vec{y}$. אז מתקיים:

$$\| \vec{x}+\vec{y} \|^2 = \| \vec{x} \|^2 + \| \vec{y} \|^2$$

שאלה 5: יהיו $\vec{v_1},\dots\vec{v_n}$ המאונכים זה לזה. הראו ש:

$$\| \vec{v_1}+\ldots+\vec{v_n} \|^2 = \| \vec{v_1} \|^2 + \ldots + \| \vec{v_n} \|^2$$

פתרון: נראה באינדוקציה על n. עבור $n = 1$ הטענה טריוויאלית. נניח עבור $n-1$ ונוכיח עבור n. מכך ש- $\vec{v_1},\dots\vec{v_n}$ מאונכים זה לזה, בפרט כל הוקטורים $\vec{v_1},\dots\vec{v_{n-1}}$מאונכים ל-$\vec{v_n}$.
משאלה 4, נובע ש- $\vec{v} = \vec{v_1}+\ldots+\vec{v_{n-1}}$ מאונך ל-$\vec{v_n}$. לכן לפי משפט פיתגורס:

$$\| \vec{v_1}+\ldots+\vec{v_n} \|^2 = \| \vec{v}+\vec{v_n} \|^2 = \| \vec{v} \|^2 + \| \vec{v_n} \|^2$$

מהנחת האינדוקציה נקבל ש:

$$\| \vec{v} \|^2 = \| \vec{v_1} \|^2 + \ldots + \| \vec{v_{n-1}} \|^2$$

ולכן נסיק כי:

$$\| \vec{v_1}+\ldots+\vec{v_n} \|^2 = \| \vec{v_1} \|^2 + \ldots + \| \vec{v_n} \|^2$$

כנדרש.

שאלה 6: יהיו $\vec{v},\vec{u} \in \mathbb{R}^n$, כך $\vec{v} \neq 0$. הוכיחו כי $\| \vec{u}_{\parallel} \| \leq \| \vec{u} \|$
פתרון: נשים לב שמהגדרה, $\vec{u}_{\parallel} = c\vec{v}$ וגם $\vec{u}_{\perp} \perp \vec{v}$. לכן מבילינאריות:

$$(\vec{u}_{\parallel},\vec{u}_{\perp}) = c(\vec{v},\vec{u}_{\perp}) = 0$$

נשתמש כעת במשפט פיתגורס ונסיק כי:

$$\| \vec{u} \|^2 = \| \vec{u}_{\|} + \vec{u}_{\perp} \|^2 = \| \vec{u}_{\|} \|^2 + \| \vec{u}_{\perp} \|^2 \geq \| \vec{u}_{\|} \|^2$$

נוציא שורש משני האגפים ונקבל כי $\| \vec{u}_{\|} \| \leq \| \vec{u} \|$ כנדרש.

משפט אי שוויון קושי שוורץ (מההרצאה): לכל $\vec{v}, \vec{u} \in \mathbb{R}^n$ מתקיים כי:

$$|(\vec{v}, \vec{u})| \leq \| \vec{v} \| \| \vec{u} \|$$

ויש שוויון אמ"מ $\vec{v}, \vec{u}$ ת"ל.

שאלה 7: יהיו $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ מספרים ממשיים. הראו שאם $\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = 1$ אז $\sum_{k=1}^{n} x_k \leqslant \sqrt{n}$.

פתרון: נתבונן בוקטור $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ שהקואורדינטות שלו הן

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

ונשים לב כי

$$\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \sum_{k=1}^{n} x_k$$

וגם

$$\|\vec{x}\|^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = 1 .$$

מאי-שוויון קושי שוורץ נקבל כי

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \right) \leqslant \left\| \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \right\| \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \right\| = 1 \cdot \sqrt{n} = \sqrt{n}$$

הגדרה (מההרצאה): הזווית $\gamma \in [0, \pi]$ בין שני וקטורים $0 \neq \vec{v}, \vec{u} \in \mathbb{R}^n$ מוגדרת ע"י:

$$\gamma = arccos \left(\frac{(\vec{v}, \vec{u})}{\| \vec{v} \| \| \vec{u} \|} \right)$$

שאלה 8: חשבו את הזוויות בין הוקטורים הבאים:

- $\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -9 \\ 3 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}$

פתרון:

- $\gamma = arccos \left(\frac{(\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -9 \\ 3 \end{bmatrix})}{\| \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} \| \| \begin{bmatrix} -9 \\ 3 \end{bmatrix} \|} \right) = arccos \left(\frac{-18+18}{\sqrt{(4+36)(81+9)}} \right) = arccos(0) = \frac{\pi}{2}$
- $\gamma = arccos \left(\frac{(\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix})}{\| \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \| \| \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix} \|} \right) = arccos \left(\frac{4+21}{\sqrt{(25)(50)}} \right) = arccos(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{\pi}{4}$

מחסנית- שאלה 9: יהיו $\vec{v},\vec{u}\in\mathbb{R}^n$ כך ש $\| \vec{v} \|=\| \vec{u} \|$. בנוסף, $5\vec{u}-4\vec{v},\vec{u}+2\vec{v}$ מאונכים זה לזה. מצאו את הזווית בין $\vec{u}$ל- $\vec{v}$.

פתרון: נשים לב כי:

$$0=(5\vec{u}-4\vec{v},\vec{u}+2\vec{v})=5(\vec{u},\vec{u}+2\vec{v})-4(\vec{v},\vec{u}+2\vec{v})=5(\vec{u},\vec{u})+10(\vec{u},\vec{v})-4(\vec{v},\vec{u})-8(\vec{v},\vec{v})$$

נעביר אגפים ונציב $\| \vec{v} \|=\| \vec{u} \|$ ונקבל:

$$3\| \vec{v} \|^2=6(\vec{u},\vec{v})\Rightarrow(\vec{u},\vec{v})=\frac{\| \vec{v} \|^2}{2}$$

כעת נרצה לחשב את הזווית ונקבל:

$$\gamma=arccos\left(\frac{(\vec{v},\vec{u})}{\| \vec{v} \|\| \vec{u} \|}\right)=arccos\left(\frac{0.5\| \vec{v} \|^2}{\| \vec{v} \|^2}\right)=arccos(0.5)=\frac{\pi}{3}$$